

WISSENSCHAFTLICHE BEILAGE
ZUM PROGRAMM DES PROGYMNASIUMS ZU LAUENBURG IN POMMERN.
OSTERN 1901.

GENAUE UND VOLLSTÄNDIGE LÖSUNGEN DES PROBLEMS DER DREITEILUNG EINES WINKELS

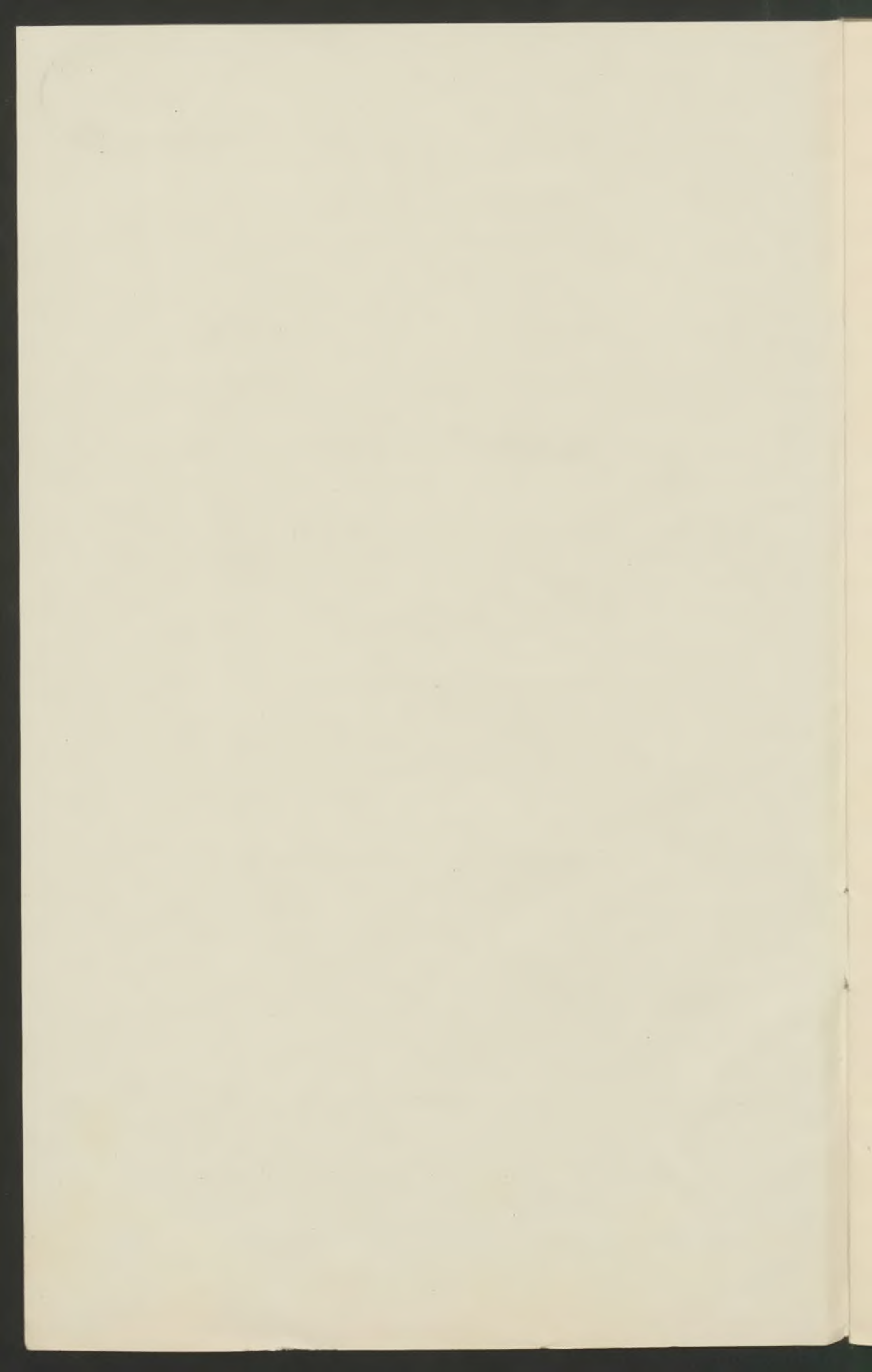
VON

PROFESSOR C. FRENZEL.

MIT EINER LITHOGRAPHIERTEN TAFEL.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.
1901.

1901. Prog.-Nr. 150.



Genaue und vollständige Lösungen des Problems der Dreiteilung eines Winkels.

In seinem Aufsatze „El problema de la Triseccion del angulo", der im 101. Bande der „Anales de la Universidad de Chile" im Jahre 1898 erschienen ist, stellt Herr Francisco Mardones die wichtigsten Konstruktionen zusammen, die man seit der Blütezeit der griechischen Mathematik ersonnen hat, um das berühmte Problem der Trisektion eines beliebigen Winkels zu lösen. Da jedoch der Verfasser dieses inhaltreichen Aufsatzes die Begründung für die meisten dieser Konstruktionen nicht angiebt, auch nicht überall auf den äufserst wichtigen Umstand aufmerksam macht, dafs jede dieser Konstruktionen drei verschiedene Lösungen ergiebt, so sollen an dieser Stelle die betreffenden Konstruktionen noch einmal dargelegt, vervollständigt und begründet werden.

Ursprünglich war es meine Absicht, diesen genauen Konstruktionen noch einige besonders bemerkenswerte, mit Zirkel und Lineal ausführbare Näherungskonstruktionen des Problems hinzuzufügen und zum Schlufs zu zeigen, dafs dieses letztere durch blofse Anwendung von Zirkel und Lineal keine geometrisch genaue Lösung zuläfst. Doch kann ich auf die Ausführung dieser Absicht verzichten, da einige jener Näherungskonstruktionen von mir bereits in der Hoffmannschen „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht" [Jahrgang 30, S. 336—340] besprochen worden sind, und da andererseits der Beweis des Satzes, dafs die Dreiteilung eines beliebigen Winkels mit Zirkel und Lineal nicht ausgeführt werden kann, von Herrn Geheimrat Prof. Dr. F. Klein in seinen „Vorträgen über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie" (Leipzig, B. G. Teubner, 1895) in so klarer und überzeugender Weise geführt worden ist, dafs jede weitere Diskussion der Frage nach der Lösbarkeit des Problems auf elementar-geometrischem Wege als vollständig überflüssig erscheint.

1. Lösung des Problems mittels der Pascalschen Schneckenlinie.

Die nachweislich älteste, rein geometrische Konstruktion*) für die Dreiteilung eines Winkels führt M. Cantor im 1. Bande seiner „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" (1. Aufl., S. 256) auf Archimedes zurück. Es sei (Fig. 1) α der gegebene, in drei gleiche Teile zu teilende Winkel mit dem Scheitelpunkte A. Beschreibt man um diesen Punkt mit einem beliebigen Radius r einen Kreisbogen, welcher die Schenkel des Winkels α in den Punkten B und C, sowie die Verlängerung von CA im Punkte O schneidet, und zieht man vom Punkte O aus einen die Kreisperipherie in E und den Winkelschenkel AB in F schneidenden Strahl von solcher Beschaffenheit, dafs $EF = r$ ist, so ist, wie sich leicht aus den Sätzen von den Basiswinkeln eines gleichschenkligen Dreiecks und vom Aufsenwinkel ergiebt,

$$\sphericalangle\, OFA = EAF = \frac{\alpha}{3}\cdot$$

Zieht man noch durch den Mittelpunkt des Kreises zu der Linie OF die Parallele AG, so ist auch

$$\sphericalangle\, FAG = \frac{\alpha}{3}\cdot$$

Für diese scheinbar so einfache Aufgabe, durch den Punkt O einen Strahl von der Beschaffenheit zu ziehen, dafs der aufserhalb des Kreises liegende Abschnitt desselben $EF = r$ ist, giebt es keine elementar-geometrische Lösung, d. h. eine Lösung mittels ausschliefslicher Anwendung des Zirkels und des Lineals, wobei das Lineal natürlich nur dazu dienen darf, zwei beliebige Punkte durch eine gerade Linie zu verbinden, nicht aber zur Abmessung von Strecken. Die analytische Lösung dieser Aufgabe liefert für den zu bestimmenden Punkt F zwei geometrische Örter, nämlich erstens den Winkelschenkel AB und zweitens eine gewisse Kurve 4ter Ordnung, die sogenannte Pascalsche Schneckenlinie (limaçon de Pascal)**).

Um diesen zweiten geometrischen Ort zu erhalten, lege man (Fig. 2) durch den Punkt O ein Strahlenbüschel und trage auf

---

*) Auf die noch ältere Konstruktion mit Hilfe der Quadratrix des Hippias von Elis (Cantor, Vorlesungen, S. 167) ist hier keine Rücksicht genommen, da sie nicht als rein geometrisch gelten kann.

**) Vgl. Mardones a. a. O., S. 19 und J. Petersen, „Methoden und Theorieen zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben" (Kopenhagen 1879), Aufg. 409. Von letzterem Werke liegt mir nur die franz. Übersetzung vor, die bei Gauthier-Villars in Paris im Jahre 1892 erschienen ist.

jedem einzelnen Strahle vom Punkte H aus, in welchem der betreffende Strahl die Kreisperipherie schneidet, nach beiden Seiten den Radius r ab. Die Aufeinanderfolge der so erhaltenen Punkte J und J' bildet die Pascalsche Schneckenlinie.

Der erste geometrische Ort für den Punkt F war der Winkelschenkel AB. Derselbe, bezw. seine Verlängerung über den Punkt A hinaus, schneidet die Schneckenlinie (abgesehen vom Punkte A) nicht nur im Punkte F, sondern noch in zwei anderen Punkten F' und F''. Zieht man nun durch den Mittelpunkt des Kreises zu der Linie OF' die Parallele AG' in entgegengesetzter Richtung und zu der Linie OF'' die gleichgerichtete Parallele AG'', so stehen auch diese beiden Strahlen AG' und AG'' zur Dreiteilung des Winkels α in enger Beziehung, da sie die Winkel $360^0 - \alpha$, bezw. $360^0 + \alpha$ in drei gleiche Teile teilen.

Sind nämlich E' und E'' diejenigen Punkte, in denen die Strahlen OF' und OF'' die Peripherie des Kreises schneiden, und verbindet man dieselben mit dem Mittelpunkte des Kreises, so ist, wenn man für den Augenblick den Winkel $E'F'A = E'AF'$ mit α' bezeichnet,

$$\measuredangle AE'F' = AOF' = 2R - 2\alpha';$$

nun ist aber $\measuredangle E'F'A$ als Aufsenwinkel des Dreiecks OAF' gleich der Summe der beiden gegenüberliegenden Dreieckswinkel, d. h.

$$\alpha' = (2R - \alpha) + (2R - 2\alpha'),$$

folglich

$$3\alpha' = 4R - \alpha \quad \text{oder} \quad \alpha' = 120^0 - \frac{\alpha}{3}$$

und somit auch

$$\measuredangle BAG' = 120^0 - \frac{\alpha}{3}.$$

Ebenso erhält man

$$\measuredangle BAG'' = 120^0 + \frac{\alpha}{3}.$$

Es teilt daher in der That der Strahl AG' den Winkel $360^0 - \alpha$ und ebenso der Strahl AG'' den Winkel $360^0 + \alpha$ in drei gleiche Teile.

Dafs die Pascalsche Schneckenlinie eine Kurve 4ter Ordnung ist, kommt zwar einstweilen nicht in Betracht, soll jedoch, da weiter unten darauf Bezug genommen wird, gleich an dieser Stelle bewiesen werden. Wir legen ein Koordinatensystem mit dem Anfangspunkte O zu Grunde, dessen x-Axe der Strahl OA ist und dessen y-Axe in linksläufiger Drehung darauf senkrecht steht. Irgend ein von O ausgehender Strahl, der die Kreisperipherie im Punkte H, die Schneckenlinie in den Punkten J und J' schneidet, bilde mit der Abscissenaxe den Winkel φ; ξ und η seien die

Koordinaten des Punktes H, x und y diejenigen des Punktes J oder J'. Dann ist die Gleichung des Kreises:

$$\xi^2 + \eta^2 = 2r\xi;$$

ferner ist

$$x = \xi \pm r \cdot \cos\varphi = \xi + \frac{rx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$y = \eta \pm r \cdot \sin\varphi = \eta + \frac{ry}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

also

$$\xi = x \cdot \left(1 - \frac{r}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad \text{und} \quad \eta = y \cdot \left(1 - \frac{r}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Setzt man diese Ausdrücke für ξ und η in die Gleichung des Kreises ein, so erhält man als Gleichung der Pascalschen Schneckenlinie in rechtwinkligen Koordinaten:

$$(x^2 + y^2) \cdot \left(1 - \frac{r}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 = 2rx \cdot \left(1 - \frac{r}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Dividiert man, was hier zulässig ist, beide Seiten dieser Gleichung durch den gemeinsamen Faktor $1 - \frac{r}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, so ergiebt sich

$$x^2 + y^2 - r \,.\, \sqrt{x^2 + y^2} = 2rx,$$

oder endlich nach Beseitigung des Wurzelzeichens:

$$(x^2 + y^2 - 2rx)^2 = r^2 \cdot (x^2 + y^2).$$

2. Lösung des Problems mittels der Konchoide oder Muschellinie des Nikomedes.

Archimedes führte, wie im vorigen Abschnitt gezeigt wurde, das Problem der Trisektion auf die einfachere Aufgabe zurück, durch einen auf der Peripherie eines Kreises gegebenen Punkt einen den Kreis und eine gegebene gerade Linie schneidenden Strahl so zu ziehen, daſs der zwischen beiden Schnittpunkten liegende Abschnitt des Strahls einer gegebenen Strecke gleich ist. Nikomedes hat diese Lösung dadurch vereinfacht, daſs er den Kreis durch eine zweite gerade Linie ersetzte.

In der That, ist α der gegebene in drei gleiche Teile zu teilende Winkel mit dem Scheitelpunkte A (Fig. 3), und schneidet man von dem einen Schenkel desselben eine beliebige Strecke $AC = r$ ab, fällt ferner von C auf den andern Schenkel das Lot CB und vervollständigt das rechtwinklige Dreieck ABC zu dem Rechteck $ABCD$, so handelt es sich nur darum, durch den Punkt A einen die Gerade BC im Punkte E und die Gerade CD im Punkte G

schneidenden Strahl so zu ziehen, dafs die Strecke $EG = 2r$ ist. Es sei M der Halbierungspunkt der Strecke EG. Verbindet man denselben mit C, so sind die beiden Dreiecke CMG und ACM gleichschenklig, folglich ist

$$\sphericalangle BAG = CGM = \frac{\alpha}{3}.$$

Aber auch selbst die so vereinfachte Aufgabe läfst keine elementar-geometrische Lösung zu, ihre analytische Lösung führt vielmehr ebenso wie die vorhergehende Aufgabe auf eine Kurve 4ter Ordnung, die sogenannte Konchoide oder Muschellinie des Nikomedes. Man erhält diese Kurve, indem man durch den Punkt A wieder ein Strahlenbüschel legt und auf jedem einzelnen Strahle vom Punkte E aus, in welchem er die unbegrenzte Gerade BC schneidet, nach beiden Seiten die Strecke $2r$ abträgt. Die Gesamtheit der so erhaltenen Punkte G bildet die Konchoide, welche aus zwei von einander getrennten Zweigen besteht, die beide die Gerade BC zu Asymptoten besitzen.

Um die Gleichung dieser Kurve aufzustellen, legen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Anfangspunkte A zu Grunde; zur x-Axe wählen wir den Strahl AB und zur y-Axe den hierauf in rechtläufigem Sinne senkrechten Strahl AY. Eine beliebige durch A gehende Gerade möge die gerade Linie BC im Punkte H, den oberen Zweig der Konchoide im Punkte J und den unteren Zweig derselben im Punkte J' schneiden. Dann ist

$$AJ = 2r + AH; \quad AJ' = 2r - AH.$$

Bezeichnet man nun die Strecke AB mit b und fällt man die Ordinaten JK und $J'K'$, so ergiebt sich aus einem bekannten Lehrsatze über die Proportionalität von Strecken auf einem Strahlenpaare, das von parallelen Linien durchschnitten wird:

$$AH = \frac{2br}{x-b} \text{ bezw. } AH = \frac{2br}{b-x},$$

mithin wird sowohl

$$AJ \text{ als auch } AJ' = 2r + \frac{2br}{x-b} = \frac{2rx}{x-b},$$

wo natürlich x die Abscisse entweder des Punktes J oder des Punktes J' bezeichnet. Andererseits ist

$$AJ \text{ und auch } AJ' = \sqrt{x^2 + y^2};$$

mithin besteht für beide Zweige der Konchoide die Gleichung

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2rx}{x-b},$$

oder in rationaler Form:

$$y^2 = 4r^2 \left(\frac{x}{x-b}\right)^2 - x^2.$$

Die Konchoide ist also in der That eine Kurve 4. Ordnung.

Da nun eine Kurve 4[ter] Ordnung von einer geraden Linie im allgemeinen in vier Punkten geschnitten wird, so hat auch die gerade Linie CD, auf welcher der gesuchte Punkt G liegt, mit der Konchoide im allgemeinen vier Schnittpunkte gemeinsam, die wir mit G, G', G'' und Γ bezeichnen wollen; G sei derjenige Schnittpunkt, der dem oberen Zweige der Konchoide angehört, dann gehören die drei anderen Punkte dem unteren Zweige an. Einer dieser drei Punkte, für den wir die Bezeichnung Γ gewählt haben, besitzt gegenüber den beiden anderen Punkten eine besondere Eigentümlichkeit: er liegt nämlich, wie aus der Figur unmittelbar hervorgeht, symmetrisch zum Punkte C in Bezug auf die Axe AY, kommt also, da der Strahl $A\Gamma$ mit der negativen x-Axe ebenfalls den Winkel α bildet, bei der Dreiteilung dieses Winkels nicht in Betracht. Für den Schnittpunkt G der Geraden CD mit der Konchoide wurde bereits gezeigt, daſs

$$\sphericalangle BAG = \frac{\alpha}{3}$$

ist; für die beiden anderen, noch in Betracht zu ziehenden Punkte G' und G'' läſst sich ebenso wie im ersten Abschnitte durch Anwendung der Sätze über die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks und über den Auſsenwinkel eines beliebigen Dreiecks beweisen, daſs

$$\sphericalangle BAG' = 60^0 + \frac{\alpha}{3} \text{ und } \sphericalangle BAG'' = 120^0 + \frac{\alpha}{3}$$

ist. Es teilt mithin in Fig. 3 der Strahl AG den Winkel α, der Gegenstrahl von AG' den Winkel $360^0 - \alpha$ und der Strahl AG'' den Winkel $360^0 + \alpha$ in drei gleiche Teile.

Obwohl, wie soeben gezeigt wurde, eine einfache geometrische Betrachtung zu dem Resultat führt, daſs die Verlängerung von CD die Schleife der Konchoide im allgemeinen in zwei Punkten Γ und G'' schneidet, so bildet die analytische Bestätigung dieser Thatsache ein gewisses Interesse und liefert nebenbei noch ein anderes bemerkenswertes Ergebnis. Es handelt sich dabei offenbar um die Bestimmung der Ordinate desjenigen Punktes der Kurve, in welchem eine zur x-Axe parallele Tangente die Kurve berührt. Für diesen Punkt muſs bekanntlich der Differentialquotient $\frac{dy}{dx} = 0$ sein. Aus der oben aufgestellten Gleichung der Kurve ergiebt sich aber durch Differentiation nach einer einfachen Umformung

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = -x \cdot \left(\frac{4br^2}{(x-b)^3} + 1\right),$$

und da

$$y = x \cdot \sqrt{\frac{2r}{(x-b)^2} - 1}$$

ist, so erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4br^2 + (x-b)^3}{(x-b)^3 \cdot \sqrt{4r^2 - (x-b)^2}}.$$

Die Bedingung $\frac{dy}{dx} = 0$ wird also erfüllt, wenn

$$(x-b)^3 = -4br^2, \text{ d. h.}$$

$$x = b - \sqrt[3]{4br^2} = b \cdot \left(1 - \sqrt[3]{\frac{4}{\cos^2\alpha}}\right)$$

ist. Der diesem Werte von x entsprechende Wert von y ergiebt sich aus der Gleichung

$$y^2 = 4r^2 \cdot \left(\frac{x}{x-b}\right)^2 - x^2.$$

Nun ist

$$\frac{x}{x-b} = 1 - \sqrt[3]{\frac{\cos^2\alpha}{4}},$$

also wird

$$y^2 = \frac{4b^2}{\cos^2\alpha} \cdot \left(1 - \sqrt[3]{\frac{\cos^2\alpha}{4}}\right)^2 - b^2 \cdot \left(1 - \sqrt[3]{\frac{4}{\cos^2\alpha}}\right)^2 = b^2 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{4}{\cos^2\alpha}} - 1\right)^3$$

und somit

$$y = \pm b \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{4}{\cos^2\alpha}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Der absolute Betrag dieses Wertes ist, wie sich leicht zeigen läſst, stets gröſser als die Strecke $BC = b \cdot \operatorname{tg}\alpha$. Nur für $\alpha = 45^0$ werden beide Strecken einander gleich, nämlich $= b$, und in diesem Falle fällt der Punkt G'' mit dem Punkte Γ zusammen. Je mehr der Winkel α von 45^0 abweicht, umso mehr entfernt sich die zur x-Axe parallele Tangente der Kurvenschleife von der Linie CD; so ist z. B.

für $\alpha = 40^0$ der Abstand der Tangente von der x-Axe
$y = 0{,}8481 \cdot b$ und $AD = 0{,}8391 \cdot b$,

für $\alpha = 50^0$ der Abstand der Tangente von der x-Axe
$y = 1{,}2033 \cdot b$ und $AD = 1{,}1918 \cdot b$,

hingegen

für $\alpha = 10^0$ der Abstand der Tangente von der x-Axe
$y = 0{,}4691 \cdot b$ und $AD = 0{,}1763 \cdot b$,

für $\alpha = 80^0$ der Abstand der Tangente von der x-Axe
$y = 8{,}3018 \cdot b$ und $AD = 5{,}6713 \cdot b$.

Solange der Winkel $\alpha < 45^0$ ist, liegt der Punkt G'' zwischen den Punkten D und Γ; ist jedoch $\alpha > 45^0$, so liegt derselbe auf der Verlängerung von $D\Gamma$.

3. Andere Lösung des Problems mittels der Konchoide.

Im vorigen Abschnitte wurde das Problem der Trisektion des Winkels α und der zugehörigen beiden Winkel $360^0 \pm \alpha$ mittels der Konchoide und einer geraden Linie gelöst. Es läſst sich nun zeigen, daſs man die gerade Linie auch durch einen Kreis ersetzen kann.

Es sei (Fig. 4) wieder α der in drei gleiche Teile zu teilende Winkel mit dem Scheitelpunkte A. Man beschreibe um diesen Punkt mit einem beliebigen Radius einen Kreis, der die Schenkel des Winkels α in den Punkten C und D schneidet, und fälle von C auf AD das Lot CB. Ferner lege man durch den Punkt C ein Strahlenbüschel und trage auf jedem einzelnen Strahle vom Punkte E aus, in welchem er die unbegrenzte Gerade AD schneidet, nach beiden Seiten den Radius des Kreises ab; man erhält auf diese Weise zwei von einander durch die Gerade AD getrennte Reihen von Punkten F, welche natürlich in ihrer stetigen Aufeinanderfolge wieder eine Konchoide bilden.

Diese Konchoide schneidet den Kreis in fünf Punkten.*) Der eine von diesen Punkten ist der Punkt C, der Doppelpunkt der Konchoide; ein zweiter Schnittpunkt liegt, wie aus der Entstehungsweise der Kurve hervorgeht, auf dem Gegenstrahle des Winkelschenkels AC, kommt also ebenso wenig wie der Schnittpunkt C hier in Betracht. Die drei anderen Schnittpunkte mögen mit F, F' und F'' bezeichnet werden. Zieht man nach diesen Punkten die Radien des Kreises, so entstehen wieder drei Paare von gleichschenkligen Dreiecken, aus denen sich in ähnlicher Weise wie früher zeigen läſst, daſs

$$\sphericalangle AEC = \frac{\alpha}{3}, \quad \sphericalangle AE'C = 120^0 - \frac{\alpha}{3} \text{ und } \sphericalangle AE''C = 60^0 - \frac{\alpha}{3}$$

ist. Zieht man nun durch den Scheitelpunkt des gegebenen Winkels zu den Linien EC, CE' und $E''C$ die Parallelen AG, AG' und AG'', so wird

$$\sphericalangle BAG = \frac{\alpha}{3}, \quad \sphericalangle BAG' = 120^0 - \frac{\alpha}{3} \text{ und } \sphericalangle BAG'' = 120^0 + \frac{\alpha}{3};$$

die Strahlen CG, CG' und CG'' teilen somit bezw. die Winkel α, $360^0 - \alpha$ und $360^0 + \alpha$ in drei gleiche Teile.

---

*) An und für sich müssen Konchoide und Kreis acht Schnittpunkte gemeinsam haben, da erstere eine Kurve 4[ter] Ordnung, letztere eine solche 2[ter] Ordnung ist. Da aber einer dieser Schnittpunkte der Doppelpunkt der Konchoide ist und zwei fernere Schnittpunkte mit den beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkten zusammenfallen, so bleiben noch fünf getrennte und reell vorhandene Schnittpunkte übrig. Ebenso verhält es sich mit der Pascalschen Schneckenlinie; auch sie hat als Doppelpunkte den Punkt O (Fig. 2) und die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte. — Über die Existenz dieser beiden Kreispunkte giebt den elementarsten Aufschluſs Herr Prof. Heger in Schlömilchs „Handbuch der Mathematik", Bd. II, S. 70—72.

4. Lösung des Problems mittels eines Kreises und einer gleichseitigen Hyperbel.

Zieht man in Fig. 3 durch den Punkt B zu der Linie AG und durch den Punkt G zu EB die Parallelen, die sich im Punkte F schneiden mögen, so läſst sich durch eine sehr einfache Betrachtung zeigen, daſs sowohl dieser Punkt F als auch der Punkt B auf einer gleichseitigen Hyperbel mit den beiden Asymptoten DG und AY liegt. Man wird zu dem Zwecke nur zu beweisen haben, daſs das Rechteck mit den beiden anstoſsenden Seiten DG und FG gleich ist dem Rechteck $ABCD$. Nun ist aber

$$FG = BE = b \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3}$$

$$DG = b + CG = b + 2r \cdot \cos \frac{\alpha}{3},$$

folglich

$$DG \cdot FG = \left(b + 2r \cos \frac{\alpha}{3}\right) \cdot b \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} = b^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} + 2br \cdot \sin \frac{\alpha}{3}$$

$$= b \sin \frac{\alpha}{3} \cdot \left(2r + \frac{b}{\cos \frac{\alpha}{3}}\right) = b \sin \frac{\alpha}{3} \cdot (2r + AE)$$

$$= b \cdot AG \cdot \sin \frac{\alpha}{3} = b \cdot AD,$$

d. h.

$$DG \cdot FG = AB \cdot AD.$$

Der Punkt F liegt also in der That, wie oben behauptet wurde, auf der durch den Punkt B gehenden gleichseitigen Hyperbel und auſserdem, da $BF = EG = 2r$ bekannt ist, auf dem um den Punkt B als Mittelpunkt mit dem Radius $2r$ beschriebenen Kreise.

Hiernach läſst sich das Trisektionsproblem auch auf folgende Weise lösen. Es sei (Fig. 5) α der gegebene Winkel mit dem Scheitelpunkte A. Man trage auf dem einen Schenkel dieses Winkels eine beliebige Strecke $AC = r$ ab, fälle von C auf den anderen Schenkel das Lot CB und ziehe zu AB und BC durch die Punkte C bezw. A die Parallelen UV und WZ, die sich im Punkte D schneiden. Ferner zeichne man die gleichseitige Hyperbel, die diese Linien UV und WZ zu Asymptoten hat und durch den Punkt B hindurchgeht, — was durch eine einfache Punktkonstruktion mittels der vierten Proportionale leicht bewerkstelligt werden kann — und beschreibe endlich um den Punkt B als Mittelpunkt mit dem Radius $2r$ einen Kreis, so sind durch die Schnittpunkte dieses Kreises und der Hyperbel diejenigen Strahlen bestimmt, welche den Winkel α und die zugehörigen Winkel $360^0 \pm \alpha$ in drei gleiche Teile teilen.

Um dies ohne Bezugnahme auf die frühere, in Fig. 3 ausgeführte Konstruktion zu beweisen, legen wir ein rechtwinkliges

Koordinatensystem zu Grunde, dessen x-Axe der Strahl BC und dessen y-Axe die Verlängerung von AB ist. Dann lautet die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = 4r^2,$$

oder wenn wir die Strecke AB wieder mit b bezeichnen, sodaſs

$$r = \frac{b}{\cos\alpha}$$

ist,

$$1) \qquad x^2 + y^2 = \frac{4b^2}{\cos^2\alpha}.$$

Ist ferner P ein beliebiger Punkt der Hyperbel mit den Koordinaten x und y, und fällt man von demselben auf die beiden Asymptoten die Lote PO und PQ, so ist

$$PO = b + y$$

$$PQ = BC - x = b\,\mathrm{tg}\alpha - x,$$

also liefert die Bedingung, daſs das Rechteck $PODQ$ dem Rechteck $ABCD$ flächengleich ist, folgende Gleichung der Hyperbel:

$$(b + y)\cdot(b\,\mathrm{tg}\alpha - x) = b^2\cdot\mathrm{tg}\alpha$$

oder

$$2) \qquad xy + bx - by\cdot\mathrm{tg}\alpha = 0.$$

Um die Koordinaten der Schnittpunkte von Kreis und Hyperbel zu bestimmen, eliminieren wir x aus den Gleichungen 1) und 2). Aus Gleichung 2) ergiebt sich $x = \frac{by}{b+y}\cdot\mathrm{tg}\alpha$; dies in 1) eingesetzt giebt

$$y^2\cdot\left[1 + \frac{b^2}{(b+y)^2}\cdot\mathrm{tg}^2\alpha\right] = \frac{4b^2}{\cos^2\alpha}$$

oder

$$y^2\cdot[b^2 + y\,(2b + y)\cos^2\alpha] = 4b^2\cdot(b + y)^2,$$

oder endlich nach Potenzen von y geordnet:

$$3) \qquad y^4\cos^2\alpha + 2by^3\cos^2\alpha - 3b^2y^2 - 8b^3y - 4b^4 = 0.$$

Geben wir dieser Gleichung die Form

$$(y + 2b)\cdot y^3\cos^2\alpha - b^2\cdot(3y^2 + 8by + 4b^2) = 0$$

oder

$$(y + 2b)\cdot y^3\cos^2\alpha - b^2\cdot(y + 2b)\,(3y + 2b) = 0$$

oder endlich

$$(y + 2b)\cdot[y^3\cos^2\alpha - b^2\cdot(3y + 2b)] = 0,$$

so sehen wir, daſs

$$y_0 = -2b$$

eine Wurzel der Gleichung 3) ist; dieselbe hat für unser Problem jedoch keine Bedeutung, da der ihr entsprechende Schnittpunkt B_0 der dem Punkte B entsprechende Punkt des anderen Hyperbelzweiges ist. Die drei andern Wurzeln der Gleichung 3) ergeben sich durch Auflösung der Gleichung

$$y^3 \cos^2\alpha - b^2 \cdot (3y + 2b) = 0;$$

nun ist $b = r \cdot \cos\alpha$, also kann diese Gleichung auch in der Form geschrieben werden

$$4) \qquad y^3 - 3r^2 y - 2r^3 \cos\alpha = 0.$$

Drücken wir in dieser Gleichung $\cos\alpha$ durch $\cos\frac{\alpha}{3}$ aus, indem wir die bekannte Formel benutzen

$$\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3},$$

so geht dieselbe über in

$$y^3 - 8r^3\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3r^2 \cdot \left(y - 2r\cos\frac{\alpha}{3}\right) = 0$$

oder

$$\left(y - 2r\cos\frac{\alpha}{3}\right) \cdot \left[y^2 + 2ry\cos\frac{\alpha}{3} + r^2 \cdot \left(4\cos^2\frac{\alpha}{3} - 3\right)\right] = 0.$$

Demnach ist die zweite Wurzel der Gleichung 3)

$$y_1 = 2r \cdot \cos\frac{\alpha}{3},$$

und die beiden noch fehlenden Wurzeln ergeben sich durch Auflösung der quadratischen Gleichung:

$$5) \qquad y^2 + 2ry \cdot \cos\frac{\alpha}{3} = r^2 \cdot \left(3 - 4\cos^2\frac{\alpha}{3}\right).$$

Addiert man auf beiden Seiten die quadratische Ergänzung

$$\left(r \cdot \cos\frac{\alpha}{3}\right)^2 = r^2 \cdot \cos^2\frac{\alpha}{3},$$

so erhält man

$$\left(y + r\cos\frac{\alpha}{3}\right)^2 = 3r^2 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{3};$$

es wird also

$$y = r \cdot \left(-\cos\frac{\alpha}{3} \pm \sqrt{3} \cdot \sin\frac{\alpha}{3}\right).$$

Da nun

$$\cos\left(60^0 - \frac{\alpha}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\frac{\alpha}{3} + \sqrt{3} \cdot \sin\frac{\alpha}{3}\right)$$

$$\cos\left(60^0 + \frac{\alpha}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos\frac{\alpha}{3} - \sqrt{3} \cdot \sin\frac{\alpha}{3}\right)$$

ist, so haben die beiden letzten Wurzeln der Gleichung 3) die Werte:

$$y_1' = -2r \cdot \cos\left(60^0 + \frac{\alpha}{3}\right)$$

und

$$y_1'' = -2r \cdot \cos\left(60^0 - \frac{\alpha}{3}\right).$$

Es ist somit, wenn wir die aufser dem Punkte B_0 noch vorhandenen Schnittpunkte des Kreises und der Hyperbel mit F, F', F'' bezeichnen und dieselben mit dem Mittelpunkte des Kreises verbinden:

$$\sphericalangle FBY = \frac{\alpha}{3};\ \sphericalangle F'BY = 120^0 - \frac{\alpha}{3};\ \sphericalangle F''BY = 120^0 + \frac{\alpha}{3}.$$

Ziehen wir endlich zu den Radien BF, BF' und BF'' durch den Scheitelpunkt des Winkels α noch die Parallelen AG, AG' und AG'', so wird auch

$$\sphericalangle BAG = \frac{\alpha}{3};\ \sphericalangle BAG' = 120^0 - \frac{\alpha}{3};\ \sphericalangle BAG'' = 120^0 + \frac{\alpha}{3},$$

q. e. d. —

5. Lösung des Problems mittels eines Kreises und einer Hyperbel, deren Asymptotenwinkel 120^0 beträgt.

Während Herr Mardones die im vorigen Abschnitte gegebene Lösung des Trisektionsproblems nur mit wenigen Worten andeutet, behandelt er in etwas ausführlicherer Weise die Lösung dieses Problems mittels eines Kreises und einer Hyperbel, deren Asymptoten mit einander einen Winkel von 120^0 bilden. Aber auch hier giebt er nur die Konstruktion und das Ergebnis desselben in Bezug auf die Dreiteilung der Winkel α und $360^0 \pm \alpha$ an, ohne auf eine Begründung dieser Resultate einzugehen.

Diese Konstruktion gründet sich auf eine eigentümliche Eigenschaft einer solchen Hyperbel, die wir zunächst beweisen wollen.

Wir legen dabei (Fig. 6) ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Anfangspunkte M zu Grunde, dessen y-Axe auf der x-Axe in linksläufigem Drehungssinne senkrecht steht, und konstruieren zunächst zwei Strahlen MU und MV, die mit der positiven x-Axe einen Winkel von 60^0 bilden. Ferner tragen wir auf der x-Axe vom Punkte M aus nach beiden Seiten eine beliebige Strecke a zweimal hinter einander ab, nach rechts bis zu den Punkten D und B, nach links bis zu den Punkten A und B', errichten auf MX im Punkte D das Lot, welches den Strahl MU im Punkte H schneidet, und bezeichnen die Strecke DH mit b. Konstruiert man eine Hyperbel mit den Asymptoten MU und MV und den Brennpunkten B und B', wobei man sich der charakteristischen Eigen-

schaft der Hyperbel bedient, nach welcher die Differenz der Fahrstrahlen eines beliebigen Hyperbelpunktes G, nämlich

$$GB' - GB, \text{ bezw. } GB - GB' = 2a$$

sein mufs, so hat jeder Punkt auf unserer Hyperbel mit dem Asymptotenwinkel $2\varepsilon = 120^0$ die besondere Eigenschaft, dafs, wenn man ihn mit A und B verbindet und die Winkel GBA und GAB bezw. mit β und γ bezeichnet,

$$\beta = 2\gamma \quad \text{oder} \quad \beta = 2\cdot(\gamma - R)$$

ist, je nachdem der Punkt G dem rechts oder links von der y-Axe liegenden Hyperbelzweige angehört.

Aus der Mittelpunktsgleichung der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ folgt nämlich, da der Winkel HMD oder $\varepsilon = 60^0$ ist, dafs $b = a\cdot\sqrt{3}$ ist; mithin lautet die Gleichung unserer Hyperbel mit dem Asymptotenwinkel 120^0:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{3a^2} = 1 \quad \text{oder} \quad y^2 = 3\cdot(x^2 - a^2).$$

Nehmen wir nun zunächst an, der Punkt G gehöre dem auf der Seite der positiven x-Axe liegenden Hyperbelzweige an, und fällen wir von G auf MX das Lot GN, so ist $GN = y$ und $MN = x$; also ergiebt sich aus den rechtwinkligen Dreiecken GNB und GNA:

$$\overline{BG}^2 = y^2 + (2a - x)^2 = 3\cdot(x^2 - a^2) + (2a - x)^2$$
$$= 4x^2 - 4ax + a^2 = (2x - a)^2$$
$$\overline{AG}^2 = y^2 + (a + x)^2 = 3\cdot(x^2 - a^2) + (a + x)^2$$
$$= 4x^2 + 2ax - 2a^2 = 2\cdot(2x - a)(x + a);$$

folglich ist

$$BG = 2x - a$$
$$\overline{AG}^2 = 2BG\cdot(x + a).$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$\frac{AG}{BG} = 2\cdot\frac{x + a}{AG},$$

und hieraus ergiebt sich mit Anwendung des Sinussatzes:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 2\cos\gamma,$$

also

$$\sin\beta = 2\sin\gamma\cos\gamma = \sin 2\gamma,$$

d. h. es ist entweder $\beta = 2\gamma$ oder $\beta = 2\cdot(R - \gamma)$. Gehört, wie wir zunächst angenommen haben, der Punkt G dem zur rechten

Seite der y-Axe liegenden Hyperbelzweige an, so ist offenbar $\beta = 2\gamma$; liegt aber der Punkt G auf dem anderen Hyperbelzweige, so führt eine ähnliche Untersuchung zu dem Resultat, dafs alsdann $\beta = 2 \cdot (\gamma - R)$ ist.

Es sei nun α der in drei gleiche Teile zu teilende Winkel. Wir zeichnen, wie oben angegeben, eine Hyperbel mit dem Asymptotenwinkel 120^0 und der Hauptaxe $AD = 2a$, tragen an diese im Punkte A den Winkel α an und nennen den freien Schenkel dieses Winkels AC. Ferner zeichnen wir den Kreis, der diesen Winkelschenkel AC zur Tangente und die Strecke $AB = 3a$ zur Sehne hat; derselbe schneide die Hyperbel aufser im Punkte A noch in den Punkten G, G' und G'', von denen G und G'' auf dem Hyperbelzweige rechts von der y-Axe, G' auf dem anderen Zweige liegen mögen. Verbinden wir zunächst den Punkt G mit A und B, so ist, wenn wir wieder den Winkel GAB mit γ bezeichnen, nach dem oben bewiesenen Lehrsatze

$$\sphericalangle\, GBA = 2\gamma, \quad \text{also} \quad \sphericalangle\, AGB = 2R - 3\gamma.$$

Andererseits ergiebt sich aus dem Lehrsatze über den Tangentenwinkel eines Kreises, dafs

$$\sphericalangle\, AGB = 2R - \alpha$$

ist; folglich ist γ oder

$$\sphericalangle\, BAG = \frac{\alpha}{3}.$$

Ebenso beweist man, dafs, wenn man die Punkte G' und G'' mit A verbindet,

$$\sphericalangle\, BAG' = 120^0 - \frac{\alpha}{3} \quad \text{und} \quad \sphericalangle\, BAG'' = 60^0 - \frac{\alpha}{3}$$

ist; es schneidet also hier der Strahl AG vom Winkel α, der Strahl AG' vom Winkel $360^0 - \alpha$ und der Gegenstrahl von AG'' vom Winkel $360^0 + \alpha$ den dritten Teil ab.

6. Lösung des Problems mittels eines Kreises und einer Parabel.

Die letzte der hier zu behandelnden Lösungen des Trisektionsproblems rührt von Descartes her und beruht auf den Eigenschaften einer Parabel. Es sei (Fig. 7) α der gegebene, in drei gleiche Teile zu teilende Winkel. Wir beschreiben um seinen Scheitelpunkt A mit einem beliebigen Radius r einen Kreis, welcher die Winkelschenkel in den Punkten B und C schneidet, und bezeichnen die Sehne BC mit c; aufserdem konstruieren wir eine Parabel mit dem Parameter r, sodafs, wenn UV die Leitlinie, D der Scheitelpunkt und F der Brennpunkt der Parabel ist, der Abstand des

Fig. 1.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 2.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 5.

Verlag v. B. G. Teubner in Leipzig.

Lith u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig.

Punktes D von der Leitlinie gleich $DF = \frac{r}{4}$ ist. Der Strahl DF werde zur x-Axe, der dazu in linksläufigem Drehungssinne senkrechte Strahl DY zur y-Axe eines rechtwinkligen Koordinatensystems genommen. Ferner tragen wir auf dem Strahle DX vom Punkte D aus die Strecke $DE = 2r$ ab, errichten auf DX im Punkte E das Lot $EM = \frac{c}{2}$ und beschreiben mit dem Radius MD um den Punkt M einen zweiten Kreis, der die Parabel aufser im Punkte D noch in den Punkten F, F' und F'' schneiden möge. Endlich beschreiben wir mit den Ordinaten y_1, $y_1{}'$ und $y_1{}''$ dieser Schnittpunkte um den Punkt B Kreisbögen, welche den ersten Kreis in den Punkten G, G' und G'' schneiden mögen, dann sind die Strahlen AG, AG' und AG'' Dreiteilungslinien der Winkel α, $360^0 - \alpha$ und $360^0 + \alpha$.

Um dies zu beweisen, suchen wir zunächst die Werte der Ordinaten y_1, $y_1{}'$ und $y_1{}''$ zu bestimmen. Der Kreis (M) hat in Bezug auf das zu Grunde gelegte rechtwinklige Koordinatensystem die Gleichung:

$$(x - 2r)^2 + \left(y + \frac{c}{2}\right)^2 = 4r^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

oder

$$1) \qquad x^2 + y^2 - 4rx + cy = 0;$$

die Gleichung der Parabel lautet hingegen

$$2) \qquad y^2 = rx.$$

Eliminiert man x aus den beiden Gleichungen 1) und 2), so erhält man zur Bestimmung der Ordinaten der Schnittpunkte von Kreis und Parabel die Gleichung:

$$\frac{y^4}{r^2} - 3y^2 + cy = 0.$$

Scheiden wir den dem Punkte D entsprechenden Wert $y = 0$ aus, so bleibt, da $c = 2r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$ ist, zur Bestimmung der Ordinaten der Punkte F, F' und F'' die Gleichung übrig

$$3) \qquad y^3 - 3r^2y + 2r^3 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 0.$$

Diese Gleichung ist genau in derselben Weise aufzulösen, wie die Gleichung 4) auf S. 13. Setzt man

$$\sin\frac{\alpha}{2} = 3\sin\frac{\alpha}{6} - 4\sin^3\frac{\alpha}{6},$$

so geht die Gleichung über in

$$y^3 - 8r^3 \sin^3 \frac{\alpha}{6} - 3r^2 \cdot \left(y - 2r \sin \frac{\alpha}{6}\right) = 0,$$

oder

$$\left(y - 2r \cdot \sin \frac{\alpha}{6}\right) \cdot \left[y^2 + 2ry \sin \frac{\alpha}{6} - r^2 \cdot \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{6}\right)\right] = 0;$$

mithin ist

$$y_1 = 2r \cdot \sin \frac{\alpha}{6}$$

die erste Wurzel der Gleichung 3). Die beiden anderen Wurzeln ergeben sich durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$y^2 + 2ry \sin \frac{\alpha}{6} = r^2 \cdot \left(3 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{6}\right)$$

und besitzen die Werte

$$y_1' = 2r \cdot \sin\left(60^0 - \frac{\alpha}{6}\right), \quad y_1'' = -2r \cdot \sin\left(60^0 + \frac{\alpha}{6}\right) \cdot$$

Somit ist

$$BG = 2r \cdot \sin \frac{\alpha}{6}; \quad BG' = 2r \cdot \sin\left(60^0 - \frac{\alpha}{6}\right)$$

und

$$BG'' = 2r \cdot \sin\left(60^0 + \frac{\alpha}{6}\right),$$

d. h.

$$\sphericalangle BAG = \frac{\alpha}{3}; \quad \sphericalangle BAG' = 120^0 - \frac{\alpha}{3}$$

und

$$\sphericalangle BAG'' = 120^0 + \frac{\alpha}{3}, \text{ q. e. d.}$$

7. Zusammenfassung der bisherigen Ergebnisse.

Ein Rückblick auf die oben dargelegten Lösungen des Trisektionsproblems zeigt uns, dafs alle diese sechs Lösungen auf ein und dasselbe Resultat hinauskommen: Ist $\sphericalangle BAC = \alpha$ der in drei gleiche Teile zu teilende Winkel, so lassen sich stets drei Strahlen AG, AG' und AG'' von der Beschaffenheit konstruieren, dafs dieselben von den Winkeln α, $360^0 - \alpha$ und $360^0 + \alpha$ den dritten Teil abschneiden; nur ist in der Lösung (3) statt des Strahles AG' und in der Lösung (6) statt des Strahles AG'' sein Gegenstrahl zu wählen. Wir erhalten also immer drei von einander verschiedene Lösungen. Hierin liegt der charakteristische Unterschied zwischen einer genauen und einer approximativen Lösung des Problems; denn bei einer Lösung der letzteren Art (vgl. Hoffmanns Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht, Jahrg. 30, S. 336—340) ergiebt sich immer nur eine einzige Lösung. Gerade dieser Umstand, dafs jede genaue Lösung des Problems drei von

einander verschiedene und gleichberechtigte Teilungsstrahlen liefert, deutet darauf hin, daſs die analytische Lösung des Problems stets auf eine irreducible Gleichung 3ten Grades führen wird und daſs sich daher die konstruktive Lösung nicht mittels des Zirkels und des Lineals ausführen läſst. Herr Alberto Obrecht gründet auch in dem Sitzungsbericht der „Société scientifique du Chili“ vom 16. Okt. 1893 (vgl. Mardones, a. a. O., S. 30—32) einzig und allein auf diesen Umstand den Beweis für die Unmöglichkeit einer elementar-geometrischen Lösung des Problems, indem er sagt:

„Die Lage einer der Geraden, welche den gegebenen Winkel in drei gleiche Teile teilen, wird bestimmt sein durch den Scheitelpunkt des gegebenen Winkels und durch die Lage eines gewissen anderen Punktes in der Ebene der Figur. Die Lage eines Punktes aber wird in der Geometrie durch den Schnitt zweier Kurven bestimmt. Wenn in dem betrachteten Falle die beiden Kurven zwei gerade Linien sind, so ist der Punkt eindeutig bestimmt und das Problem der Dreiteilung wird nur eine einzige Lösung haben; wenn aber jene beiden Kurven eine Gerade und ein Kreis oder wenn es zwei Kreise sind, so wird es auſser dem gesuchten Punkte noch einen anderen geben, welcher der Aufgabe genügen wird, d. h. das Problem der Dreiteilung wird alsdann zwei Lösungen haben. Wenn somit die Dreiteilung sich mittels des Lineals und des Zirkels ausführen läſst, so wird es höchstens zwei Lösungen des Problems geben. Wenn sich nun beweisen läſst, daſs die Anzahl der Lösungen gleich 3 sein muſs, so wird es nicht mehr zweifelhaft sein, daſs das Problem mit Zirkel und Lineal nicht gelöst werden kann.

Dieser letzte Punkt läſst sich aber folgendermaſsen beweisen: Wenn man einen Winkel α zeichnet, so zeichnet man damit auch gleichzeitig alle Winkel von der Form $\alpha + n \cdot 360^0$, wo n irgend welche ganze Zahl ist. Folglich muſs man, wenn man den Winkel $\frac{\alpha}{3}$ sucht, auch gleichzeitig alle Winkel erhalten von der Form $\frac{\alpha}{3} + n \cdot 120^0$. Unter diesen befinden sich die drei Winkel

$$\frac{\alpha}{3},\ \frac{\alpha}{3} + 120^0 \text{ und } \frac{\alpha}{3} + 240^0,$$

die stets von einander verschieden sind; die übrigen Winkel werden sich von diesen dreien nur durch ein Vielfaches von 360^0 unterscheiden. Wenn man also durch irgend ein Verfahren den Winkel $\frac{\alpha}{3}$ bestimmt, wird man notwendiger Weise auſser diesem Winkel auch den beiden anderen Winkeln begegnen, die sowohl vom ersten als auch unter einander verschieden sind. Damit ist gezeigt, daſs das Problem der Trisektion dreier Lösungen fähig ist, und folglich kann man es, wie wir oben gesehen haben, nicht mittels des Zirkels und des Lineals lösen.“ —

So sehr nun auch diese von Herrn Alb. Obrecht vorgebrachten Gründe dafür sprechen, dafs sich das Trisektionsproblem auf elementar-geometrischem Wege nicht lösen lassen wird, so ist ein vollständig einwandsfreier Beweis für diese Thatsache erst von den Herren Prof. Jul. Petersen und Prof. F. Klein erbracht worden. Es ist von vorherein klar, dafs jedes geometrische Problem, das sich durch alleinige Anwendung von Zirkel und Lineal lösen läfst, bei seiner analytischen Behandlung auf algebraische Gleichungen führen mufs, die nur durch rationale Gröfsen und durch Quadratwurzeln lösbar sind, aber keine anderen Wurzelgröfsen enthalten. Da sich nun beliebig viele Gleichungen dritten und höheren Grades herstellen lassen, deren Lösungen diese Bedingung erfüllen, und da andererseits die Möglichkeit nicht ausgeschlossen erscheint, dafs man bei der analytischen Behandlung irgend einer Lösung des Trisektionsproblems auf eine derartige Gleichung geführt wird, so kommt die Frage nach der Lösbarkeit des Trisektionsproblems auf elementar-geometrischem Wege darauf hinaus, zu untersuchen, von welcher Beschaffenheit eine Gleichung sein mufs, deren Wurzeln sich durch rationale Gröfsen und durch Quadratwurzeln ausdrücken lassen.

Diese Untersuchung ist zuerst von Herrn Prof. Petersen in seiner „Theorie der algebraischen Gleichungen" (Kopenhagen, Höst und Sohn, 1878) geführt worden. Er gelangt dabei im siebenten Kapitel des zweiten Abschnittes, S. 159, zu folgendem wichtigen Ergebnis:

Eine irreducible Gleichung, welche durch Quadratwurzeln aufgelöst werden kann, mufs von einem Grade sein, der eine Potenz von 2 ist.

In seinen bereits oben citierten „Vorträgen über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie" hat Herr Prof. Dr. Klein diese Untersuchungen wieder aufgenommen und denselben Satz in viel einfacherer und anschaulicherer Weise begründet. Nach seiner Fassung lautet dieser Satz:

Der Grad der irreduciblen Gleichung, welcher ein aus Quadratwurzeln gebauter Ausdruck genügt, ist stets eine Potenz von 2; und umgekehrt: Ist eine irreducible Gleichung nicht vom Grade 2^h, so kann sie gewifs nicht durch Quadratwurzeln gelöst werden.

Da nun die Gleichung $x^3 = \cos\alpha + i \sin\alpha$, auf welche die analytische Formulierung der Dreiteilnng des Winkels α führt, irreducibel und ihr Grad keine Potenz von 2 ist, so ist sie nicht durch Quadratwurzeln in endlicher Zahl lösbar; also kann die Dreiteilung des Winkels mit Zirkel und Lineal nicht ausgeführt werden.